

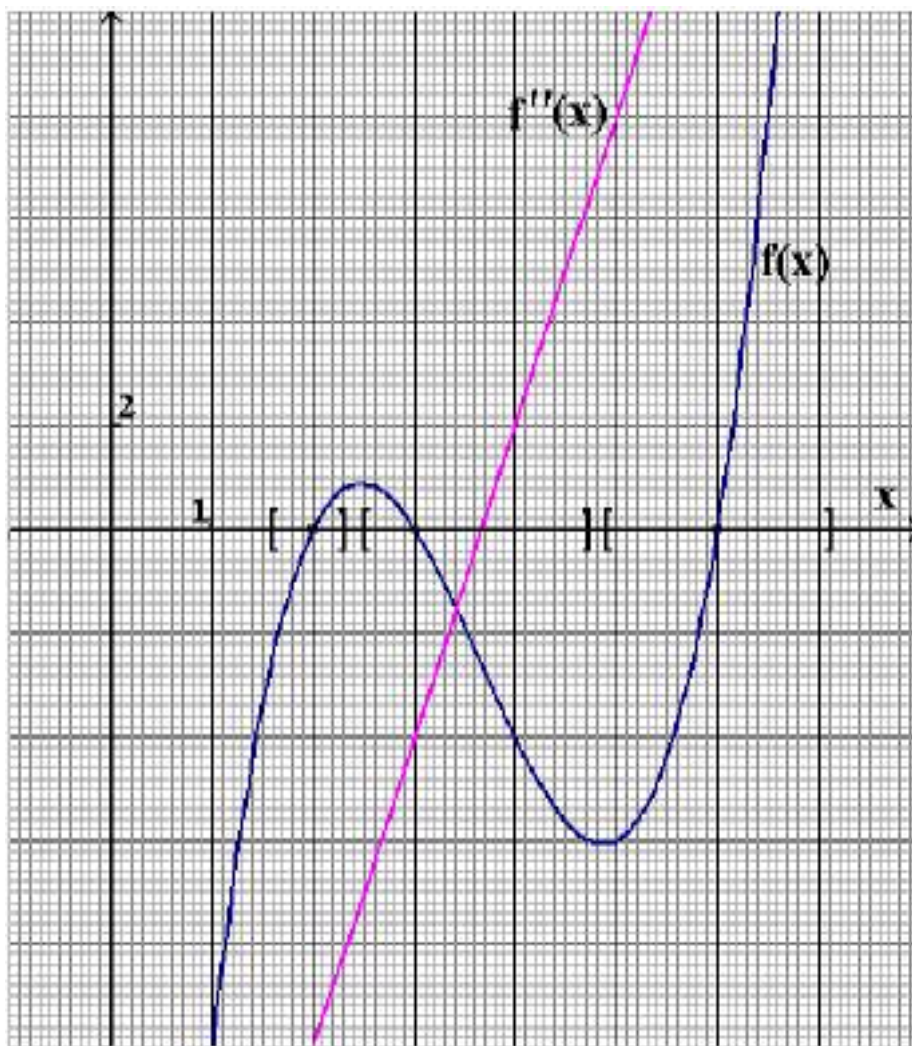
№5 Методы отыскания корней алгебраического уравнения

Дано: $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$

Решение:

а) Отделить корни алгебраического уравнения

Построим график функции.



Найдем стационарные точки функции, определяемой левой частью исходного уравнения:

$$f'(x) = 3x^2 - 22x + 36 = 0 \Rightarrow x_{1,2}^{ст} = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 - 432}}{6} \Rightarrow x_1^{ст} = 2.4648 \quad x_2^{ст} = 4.8685$$

Вычислим значение функции в полученных точках:

$$f(x_1^{ст}) = 0.8794 \quad f(x_2^{ст}) = -6.0646$$

Т.к. функция принимает на концах отрезка $[x_1^{CT}, x_2^{CT}]$ разные знаки, а производная сохраняет знак (функция на отрезке убывает), то средний корень может быть отделен на отрезке $[2.5, 4.7] \in (2.4648, 4.8685)$

Отделим левый корень. В качестве правой границы отрезка может быть выбрана точка $b = 2.3 < 2.4648$, а в качестве левой границы любая точка из интервала $(-\infty; 2)$. Возьмем $a = 1.6$.

Отделим правый корень $x_3 = 6$. В качестве левой границы отрезка выберем точку $a = 4.9 > 4.8685$, а в качестве правой границы любая точка b из интервала $(6; \infty)$. Возьмем $b = 7.1$.

Окончательно:

корень $x_1 = 2$ отделен на отрезке $[1.6; 2.3]$

корень $x_2 = 3$ отделен на отрезке $[2.5; 4.7]$

корень $x_3 = 6$ отделен на отрезке $[4.9; 7.1]$

б) Уточнить наименьший (левый) корень уравнения методом Ньютона на отрезке $[1.6; 2.3]$, точность счета 0.01

Выберем начальное приближение корня $x^0 = 1.6$

Для проверки достаточных условий сходимости метода Ньютона из выбранной начальной точки, построим график второй производной функции, определяемой левой частью уравнения:

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 36$$

$$f'(x) = 3x^2 - 22x + 36$$

$$f''(x) = 6x - 22$$

По графику видно, что в выбранной начальной точке условия сходимости метода Ньютона выполняются: $f(1.6) \cdot f''(1.6) > 0$.

Метод Ньютона

Вычислим первое приближение корня:

$$x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} = 1.6 - \frac{1.6^3 - 11 \cdot 1.6^2 + 36 \cdot 1.6 - 36}{3 \cdot 1.6^2 - 22 \cdot 1.6 + 36} = 1.89057$$

$$|x^0 - x^1| = 1.6 - 1.89057 = 0.2906$$

Вычислим второе приближение корня:

$$x^2 = x^1 - \frac{f(x^1)}{f'(x^1)} = 1.89057 - \frac{1.89057^3 - 11 \cdot 1.89057^2 + 36 \cdot 1.89057 - 36}{3 \cdot 1.89057^2 - 22 \cdot 1.89057 + 36} = 1.98782$$

$$|x^1 - x^2| = 1.89057 - 1.9878 = 0.0972$$

Последующие итерации запишем в виде таблицы.

№ итерации	x	f(x)	$ \Delta x $
0	1.6	-2.464	-
1	1.8906	-0.4989	0.2906
2	1.9878	-0.0495	0.0972
3	1.9998	-0.0007	0.0120
4	2.0000	0.0000	0.0002

Вычисления закончены, т.к. достигнута заданная точность 0.01.

Получено решение $x^* = 2$.

в) Уточнить наименьший (левый) корень уравнения методом итераций на отрезке [1.6; 2.3], используя преобразование $x = x + \alpha \cdot f(x)$, точность счета 0.01

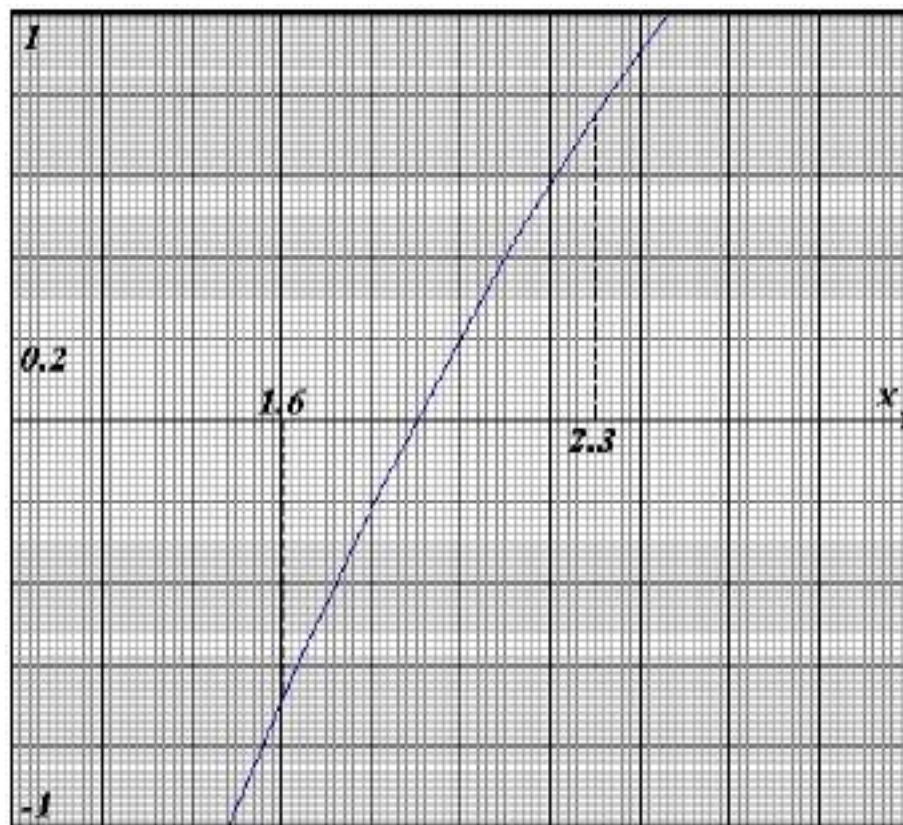
Преобразуем исходное уравнение $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$ следующим образом:

$$x = x + \alpha \cdot (x^3 - 11x^2 + 36x - 36)$$

Возьмем $\alpha = -0.2$, следовательно $\varphi(x) = x - 0.2 \cdot (x^3 - 11x^2 + 36x - 36)$

Проверим условие сходимости метода итерации для преобразованного уравнения. Найдем производную функции $\varphi'(x)$ и построим ее график на отрезке [1.6; 2.3].

$$\varphi'(x) = 1 - 0.2(3x^2 - 22x + 36)$$



По графику видно, что условие сходимости выполнено[□]: $|\varphi'(x)| < 1$ на [1.6; 2.3].

[□] Если условие сходимости для $\varphi(x)$ не выполняется, необходимо подобрать другой коэффициент α или найти другое преобразование исходного уравнения.

Выберем начальное приближение корня $x^0 = 1.6$.

Метод итераций

Вычислим первое приближение корня:

$$x^1 = \varphi(x^0) = 1.6 - 0.2(1.6^3 - 11 \cdot 1.6^2 + 36 \cdot 1.6 - 36) = 2.0928$$

$$|x^0 - x^1| = 1.6 - 2.0928 = 0.4928$$

Вычислим второе приближение корня:

$$x^2 = \varphi(x^1) = 2.0928 - 0.2(2.0928^3 - 11 \cdot 2.0928^2 + 36 \cdot 2.0928 - 36) = 2.02701$$

$$|x^1 - x^2| = 2.0928 - 2.02701 = 0.06579$$

Последующие итерации запишем в виде таблицы:

№ итерации	x	$\varphi(x)$	f(x)	$ \Delta x $
0	1.6	2.09280	-2.46400	0.49280
1	2.09280	2.02701	0.32894	0.06579
2	2.02701	2.00613	0.10442	0.02088
3	2.00613	2.00126	0.02432	0.00486
4	2.00126	2.00025	0.00504	0.00101
5	2.00025	2.00005	0.00102	0.00020

Получено решение $x^* = 2.00025 \approx 2$.

г) Уточнить наименьший (левый) корень уравнения методом половинного деления на отрезке [1.6; 2.3], точность счета 0.03

Проверим условие сходимости метода половинного деления на отрезке [1.6; 2.3]:

$$\begin{aligned} f(1.6) &= -2.464 \\ f(2.3) &= 0.777 \end{aligned} \Rightarrow f(1.6) \cdot f(2.3) < 0 \text{ - значит условие сходимости выполнено.}$$

Метод половинного деления (дихотомии)

1-я итерация

Вычислим значения функции на концах текущего отрезка [1.6; 2.3]:

$$f(a) = f(1.6) = -2.464, \quad f(b) = f(2.3) = 0.777$$

$$\text{Найдем середину текущего отрезка } c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.6+2.3}{2} = 1.95$$

Вычислим значение функции в середине отрезка: $f(c) = f(1.95) = -0.2126$

Рассмотрим произведение $f(a) \cdot f(c)$, это произведение имеет положительный знак, т.к. $f(a) < 0$ и $f(c) < 0$, значит новый отрезок для отыскания корня будет $[c, b] = [1.95; 2.3]$

$|\Delta x| = 2.3 - 1.6 = 0.7$ эта величина превышает заданную точность 0.03, вычисления продолжаются.

2-я итерация

Вычислим значения функции на концах текущего отрезка [1.95; 2.3]:

$$f(a) = f(1.95) = -0.2126, \quad f(b) = f(2.3) = 0.777$$

Найдем середину текущего отрезка $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.95+2.3}{2} = 2.125$

Вычислим значение функции в середине отрезка: $f(c) = f(2.125) = 0.4238$

Рассмотрим произведение $f(a) \cdot f(c)$, это произведение имеет неположительный знак, т.к. $f(a) < 0$ и $f(c) > 0$, значит новый отрезок для отыскания корня будет $[a, c] = [1.95; 2.125]$

$|\Delta x| = 2.3 - 1.95 = 0.35$ эта величина превышает заданную точность 0.03, вычисления продолжаются.

Последующие итерации запишем в виде таблицы:

№ итерации	a	b	f(a)	f(b)	$c = \frac{a+b}{2}$	f(c)	$ \Delta x $
0	1.6	2.3	-2.464	0.777	1.95	-0.2126	0.7
1	1.95	2.3	-0.2126	0.777	2.125	0.4238	0.35
2	1.95	2.125	-0.2126	0.4238	2.0375	0.1430	0.175
3	1.95	2.0375	-0.2126	0.1430	1.9938	-0.0252	0.0875
4	1.9938	2.0375	-0.0252	0.1430	2.0156	0.0613	0.0438
5	1.9938	2.0156	-0.0252	0.0613	2.0047	0.0186	0.0219

Вычисления закончены, т.к. достигнута заданная точность 0.03.

Получено решение $x^* = 2.0047 \approx 2$.